SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

CONDIZIONE DI CARATHEODORY PER LE SOLUZIONI OTTIME DELLE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

Bologna, 24 MAGGIO 1984

1. INTRODUZIONE

Sia Ω aperto in $R \times R^n$ tale che $\Omega_t = \{x \in R^n | (t,x) \in \Omega\} \neq \emptyset$ per $0 \leqq t \leqq 1$. Date le funzioni

$$\Omega \ni (t,x) \longrightarrow F(t,x) \neq \emptyset \text{ compatto convesso in } R^n,$$

$$\Omega_1 \ni x \longrightarrow f(x) \in R,$$

consideriamo il problema

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(\dot{x}(1)) | x(t) \in F(t,x(t)) \text{ q.d.}, (t,x(t)) \in \Omega$$

$$\text{per } 0 \leqq t \leqq 1 , x(0) = x_o, x(1) \in C_1\}$$

Se esiste $\phi \in C^1(\Omega)$ tale che

$$\phi_t(t,x) + \phi_x(t,x) \cdot y \geqq 0, \forall y \in F(t,x), \forall (t,x) \in \Omega,$$

$$\phi(1,x) = f(x), \forall x \in C_1,$$

$$\phi(0,x_o) = f(z(1)),$$

dove $z(\cdot)$: $[0,1] \to R^n$ è una "traiettoria ammissibile" per (P), allora si ha per ogni altra traiettoria ammissibile $x(\cdot)$

$$\phi(1,x(1)) - \phi(0,x_o) = \int_0^1 [\phi_t(t,x(t)) + \phi_x(t,x(t)) \cdot \dot{x}(t)] \, dt \geqq 0,$$

e quindi

$$x(1) \in C_1 \Rightarrow f(x(1)) \geqq f(z(1)).$$

Pertanto $z(\cdot)$ è soluzione del problema (P).

Clarke e Vinter [1] hanno provato che la esistenza di una funzione ϕ così fatta implica anche che il problema (P) è "calmo in $z(\cdot)$". Inoltre hanno provato, sotto convenienti ipotesi su F e f, che,se $z(\cdot)$ è soluzione locale di (P) e (P) è calmo in $z(\cdot)$, allora esiste in un intorno di $z(\cdot)$ una funzione ϕ lipschitziana che verifica le condizioni indicate sopra "in senso generalizzato".

Qui ci proponiamo di esporre i risultati di [1] con una integrazione relativa alle soluzioni generalizzate secondo Crandall-Lions [2]. Tali risultati sono espressi mediante i concetti di "gradiente generalizzato", "cono normale", per i quali rimandiamo a [3], e di un altro tipo di gradiente generalizzato introdotto in [2].

2. PRELIMINARI

Facciamo le seguenti ipotesi sui dati del problema (P)

a) f è lipschitziana in Ω_1;

b) C_1 è chiuso;

c) F assume valori nonvuoti compatti e convessi in R^n, è continua rispetto alla distanza h di Dousdorff, ossia

$$(1) \qquad h[F(t',x'), F(t,x)] \to 0 \quad \text{per } (t',x') \to (t,x),$$

esiste una costante $L \geqq 0$ tale che

$$(2) \qquad h[F(t,x'), F(t,x)] \leqq L|x'-x| ,$$

esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$F(t,x) \subset MB. \tag{3}$$

Qui abbiamo indicato con B la sfera $\{x \in R^n | \ |x| \leq 1\}$.

La *funzione hamiltoniana* è definita da

$$H(t,x,p) = \max\{p.v \,|\, v \in F(t,x)\}, \tag{4}$$

dove $p \cdot v$ indica il prodotto scalare in R^n.

Dalle ipotesi fatte su F segue che H è continua su $\Omega \times R^n$ e che $H(t,\cdot,\cdot)$ è localmente lipschitziana.

Ricordiamo le definizioni di Clarke [3] di *derivata generalizzata nella direzione* h, per f localmente lipschitziana,

$$f^o(x;h) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ s \to 0+}} \frac{f(x'+sh) - f(x')}{s},$$

di *gradiente generalizzato*

$$\partial f(x) = \{v \in R^n | \ \forall\, h \in R^n : v \cdot h \leq f^o(x;h)\} =$$

$$= \langle \{\lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i) \,|\, x_i \to x\} \rangle$$

e di *cono normale* al chiuso C in $x \in C$

$$N(C;x) = \overline{\bigcup_{t \geq o} t\, \partial\rho(x,C)} =$$

$$= \overline{\langle \{\lim_{i\to\infty} t_i(x_i - \tilde{x}_i) \,|\, t_i \geq 0, C \not\ni x_i \to x, C \ni \tilde{x}_i = \text{punto di minima distanza da } x_i\} \rangle}$$

essendo

$$\rho(x,C) = \inf\{|y-x| \mid y \in C\},$$

$\langle A\rangle$ = involucro convesso di A e $\bar{A}$ = chiusura di A.

Crandall e Lions [2] hanno introdotto un nuovo tipo di soluzione generalizzata (viscosity solution) per l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(5) \qquad G(x,u(x), \nabla u(x)) = 0,$$

utilizzando gli insiemi

$$(6) \qquad D^{\pm}u(x_0) = \{v \in R^n \mid \frac{[u(x)-u(x_0) - v\cdot (x-x_0)]^{\pm}}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0\},$$

dove u è *continua* in un intorno di x_0, $t^+ = \max\{t,0\}$, $-t^- = \min\{t,0\}$ e ∇u = gradiente di u.

Se 0 è aperto in R^n e $G:0 \times R \times R^n \to R$ è *continua*, la funzione $u:0 \to R$ *continua* si dirà, seguendo [2], soluzione generalizzata della equazione (5) se

$$(7) \qquad \pm\, G(x,u(x),v) \leqq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } v \in D^{\pm}u(x).$$

In seguito esporremo alcune delle principali proprietà di queste soluzioni generalizzate. Per ora ci limitiamo alla seguente

Proposizione 1. Se $u : 0 \to R$ è continua, valgono le affermazioni

i) se esiste il gradiente $\nabla u(x)$, allora

(8) $$D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\} ;$$

ii) se $D^+u(x) \neq \emptyset \neq D^-u(x)$, allora $D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)$;

iii) ognuno degli insiemi $D^+u(x)$, $D^-u(x)$ è non vuoto su un sottoinsieme denso di 0 ed è convesso;

iv) se u è localmente lipschitziana, si ha

(9) $$D^+u(x) \cup D^-u(x) \subset \partial u(x)$$

e se u verifica (7), allora verifica (5) quasi dappertutto su 0.

Le prime due affermazioni si verificano facilmente. Proviamo iii). Sia $x_0 \in 0$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $x_0 + \varepsilon B \subset 0$. Seguendo [2] , fissiamo $0 \leq g \in C_0^\infty (x_0+\varepsilon B)$ tale che $g(x_0) = 1$. Allora si ha

$$\max\{g(x)\ [u(x) - u(x_0) + 1]|\ |x-x_0|\leq\varepsilon\} =$$

$$= g(x_\varepsilon)\ [u(x_\varepsilon) - u(x_0) + 1] \geq 1$$

e quindi deve essere $|x_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$ e $g(x_\varepsilon) > 0$ - Ne segue che si ha in un intorno di x_ε

$$u(x) \leq \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\ [u(x) - u(x_0) + 1] + u(x_0) \quad -1 = h(x),$$

$$u(x_\varepsilon) = h(x_\varepsilon),$$

$$u(x) - u(x_\varepsilon) \leq h(x) - h(x_\varepsilon) =$$

$$= \nabla h(x_\varepsilon) \cdot (x - x_\varepsilon) + |x - x_\varepsilon| r(x),$$

con $r(x) \to 0$ per $x \to x_\varepsilon$.

Di conseguenza si ha

$$\frac{\left[u(x) - u(x_\varepsilon) - \nabla h(x_\varepsilon)\cdot(x-x_\varepsilon)\right]^+}{|x-x_\varepsilon|} \xrightarrow[x\to x_\varepsilon]{} 0$$

e quindi $\nabla h(x_\varepsilon) \in D^+u(x_\varepsilon)$, $|x_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$. Questo prova iii) relativamente a D^+u.

Proviamo iv) per D^+u. Se $v \in D^+u(x_0)$, si ha

$$\frac{[u(x) - u(x_0) - v\cdot(x-x_0)]^+}{|x-x_0|} = r(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0,$$

$$u(x) - u(x_0) - v\cdot(x-x_0) \leq |x-x_0| r(x)$$

e di qui segue, con $x - x_0 = th$, $t > 0$,

$$- v\cdot h - |h|\, r(x_0+th) \leq$$

$$\leq \frac{u(x_0) - u(x_0+th)}{t} =$$

$$= \frac{u((x_0+th)-th)-u(x_0+th)}{t}$$

e quindi

$$v\cdot(-h) \leq u^0(x_0;-h) \quad , \forall\ h \in R^n.$$

Ne segue che $v \in \partial u(x_0)$. In modo analogo si procede per D^-u. Si completa la dimostrazione di iv) ricordando che u è differenziabile quasi dappertutto in 0 e che vale (8).

<u>Osservazione</u>. L'inclusione in (9) può essere stretta, poiché esistono funzioni lipschitziane u differenziabili in x ma con $\partial u(x) \neq \{\nabla u(x)\}$.

3. INCLUSIONI DIFFERENZIALI: DEFINIZIONI E RISULTATI PRINCIPALI

Ritorniamo ora al problema (P). Diremo, seguendo [1], *traiettoria* ogni funzione assolutamente continua $x(\cdot)$ tale che

$$[0,1] \supset [t_0,t_1] \xrightarrow{x(\cdot)} R^n,$$

$$(t,x(t)) \in \Omega \quad \text{per} \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{q.d.}$$

Tale traiettoria si dirà *ammissibile* se $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x(1) \in C_1.$$

Se $\varepsilon > 0$, poniamo

$$T_\varepsilon(x(\cdot) = \{(t,y) \in [t_0,t_1] \times R^n \,|\, |y-x(t) < \varepsilon \text{ per } t_0 \leq t \leq t_1\}.$$

La traiettoria ammissibile $z\,(\cdot)$ si dirà *localmente ottima* se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $T_\varepsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e se $f(z(1)) \leqq f(\dot{x}(1))$ per ogni altra traiettoria ammissibile $x(\cdot)$ contenuta in $T_\varepsilon(z(\cdot))$.

In [4] è contenuto il seguente

Teorema 1. Sia $z(\cdot) : [0,1] \to R^n$ localmente ottima per il problema (P). Allora esistono un numero reale $\lambda \in \{0,1\}$ e una funzione assolutamente continua $p(\cdot) : [0,1] \to R^n$ tali che

$$(-\dot{p}(t),\ \dot{z}(t)) \in \partial H\,(t,z(t),p(t)) \quad \text{q.d.} \quad ,$$

$$-p(1) \in N(C_1;z(1)) + \lambda\partial f(z(1)) \quad ,$$

$$\lambda + |p(1)| > 0.$$

Sempre seguendo Clarke [4], diremo che il problema (P) è *localmente calmo* nella traiettoria $z(\cdot)$ localmente ottima se esistono le costanti $\varepsilon > 0$ e $K > 0$ tali che

$$(10) \qquad f(z(1)) - K|u| \leqq f(x(1))$$

per ogni $u \in R^n$ e per ogni traiettoria $x(\cdot) : [0,1] \to R^n$ contenuta in $T_\varepsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e verificante le condizioni

$$(11) \qquad x(o) = x_0 \quad , \quad x(1) \in C_1 + u$$

Data la traiettoria $x(\cdot)$ contenuta in $T_\varepsilon(z(\cdot))$, se $x(o) = x_0$ e se

$$\rho(x(1), C_1) = |x(1) - c_1| \ , \ c_1 \in C_1 \quad ,$$

otteniamo da (10) con $u = x(1) - c_1$,

$$(12) \qquad f(z(1)) \leqq f(x(1)) + K\,\rho\,(x(1), C_1).$$

Pertanto, se (P) è localmente calmo in $z(\cdot)$, $z(\cdot)$ risolve anche il problema

$$(P') \quad \min\{f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) \,|\, \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \text{ q.d.} \ ,$$

$$|x(t) - z(t)| < \varepsilon \ \text{ per } 0 \leqq t \leqq 1, \ \ x(o) = x_0\}$$

Se si applica il Teorema 1 a questo problema, con $C_1 = R^n$, e

quindi con $N(C_1; z(1)) = \{0\}$, e con la funzione f sostituita da $f(\cdot) + K\rho(\cdot, C_1)$, si vede che deve essere $\lambda = 1$ e quindi che $p(\cdot)$ e $z(\cdot)$ verificano le condizioni

(13) $$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H(t, z(t), p(t)) \quad \text{q.d.},$$

(14) $$-p(1) \in \partial f(z(1)) + K \partial\rho (z(1), C_1).$$

Ne segue che in questo caso vale il Teorema 1 con $\lambda = 1$.

Con Clarke e Vinter [1] , diremo che il problema (P) è *fortemente normale* nella traiettoria $z(\cdot)$ localmente ottima se il problema

$$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H (t, z(t), p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$-p(1) \in N(C_1; z(1))$$

ha come unica soluzione assolutamente continua la funzione $p(t) = 0$ per $0 \leqq t \leqq 1$.

Dunque anche in questo caso vale il Teorema 1 con $\lambda = 1$. Clarke e Vinter [1] hanno provato che la forte normalità implica anche la calma locale in $z(\cdot)$, come vedremo nel Teorema 3.

I risultati principali sulle inclusioni differenziali che ci proponiamo di esporre sono enunciati nei teoremi 2 e 3 che seguono.

Teorema 2. Sia $z(\cdot): [0,1] \to R^n$ una traiettoria ammissibile per il problema (P). Allora sono equivalenti le affermazioni (A) e (B) seguenti

(A) Esistono $\delta > 0$ tale che $T_\delta(z(\cdot)) \subset \Omega$ e una funzione localmente lipschitziana $\phi : T_\delta(z(\cdot)) \to R$ che verifica le condizioni

(15) $\phi(0,x_0) = f(z(1))$, $\phi(1,x) = f(x)$ per $x \in C_1$

e una delle condizioni (1a)-(5a) seguenti nei punti interni di $T_\delta(z(\cdot))$

(1a) $\alpha - H(t,x,-\beta) \geqq 0$, $\forall (\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x)$;

(2a) $\phi_t(t,x) - H(t,x, -\phi_x(t,x) \geqq 0$ q.d. ;

(3a) $\min\{\alpha-H(t,x,-\beta) | (\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x)\} = 0$;

(4a) $\phi_t(t,x) - H(t,x, -\phi_x(t,x)) = 0$ q.d. ;

(5a) $\alpha-H(t,x,-\beta) \geqq 0$, $\forall(\alpha,\beta) \in D^-\phi(t,x)$;

(B) $z(\cdot)$ è localmente ottima e (P) è localmente calmo in $z(\cdot)$.

Osservazione. Vedremo nel corso della dimostrazione che la funzione ϕ che compare in (A) deve verificare anche la condizione

(15') $\phi(t,z(t))$ = costante per $0 \leqq t \leqq 1$.

Una condizione sufficiente per la validità dell'affermazione (B) è data dal seguente

Teorema 3. Sia $z(\cdot) : [0,1] \to R^n$ una traiettoria localmente ottima per (P). Se (P) è fortemente normale in $z(\cdot)$, allora (P) è calmo in $z(\cdot)$.

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2

Se (k A) rappresenta l'affermazione "esiste ϕ come in (A) che verifica (15) e (ka)", proviamo le implicazioni

(1A) $\to$ (B) $\to$ (4A) $\to$ (3A) $\to$ (1A),

(B) $\to$ (5A) $\to$ (2A) $\to$ (1A).

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 5.1 di [1]. Nell'enunciato di tale teorema sono considerate solo le affermazioni (3A) e (B), ma nel corso della dimostrazione sono provate le implicazioni (1A) $\to$ (B) $\to$ (2A) $\to$ (1A) e (B) $\to$ (3A) $\to$ (1A). Per (5a) si veda [5].

Lemma 1. Sia $x(\cdot) : [t_0,t_1] \to R^n$ assolutamente continua, sia t un punto di Lebesgne per $x(\cdot)$ e sia Φ: $T_\delta(x(\cdot)) \to R$ lipschitziana. Allora i limiti

$$\lim_{h\to o} \frac{\phi(t+h,x(t+h)) - \phi(t,x(t))}{h},$$

$$\lim_{h\to o} \frac{\phi(t+h ,x(t) + h\, \dot{x}(t)) - \phi(t,x(t))}{h}$$

esistono o non esistono contemporaneamente e se esistono sono uguali.

Si ha infatti, se L è la costante di Lipschitz per ϕ e se $h > 0$

$$\left| \frac{\phi(t+h,\ x(t+h)) - \phi(t,x(t))}{h} - \frac{\phi(t+h,\ x(t)+h\dot{x}(t))-\phi(t,x(t))}{h} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{L}{h}\ |x(t+h) - x(t) - h\ \dot{x}(t)| =$$

$$= \frac{L}{h}\ \left| \int_t^{t+h} [\dot{x}(s) - \dot{x}(t)]\ ds \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{L}{h} \int_t^{t+h} |\dot{x}(s) - \dot{x}(t))\ ds \xrightarrow[h\to o\ +]{} o$$

e questo basta.

Proviamo ora che (1.A) $\to$ (B).

Sia $x(\cdot) : [0,1] \to R^n$ una traiettoria contenuta in $T_{\frac{\varepsilon}{2}}(z(\cdot))$.

Allora la funzione $t \longrightarrow \phi(t,x(t))$ è lipschitziana e quindi si ha

$$\text{(i)} \qquad \phi(1,x(1)) - \phi(0,x(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\ \phi(t,x(t))\ dt.$$

Supponiamo che $t \in [0,1]$ sia punto di Lebesgne per $x(\cdot)$, che $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$ e che esista la derivata $\frac{d}{dt}\ \phi(t,x(t))$. Allora segue dal Lemma 1, per $h \to o\ +$,

$$-\frac{d}{dt}\ \phi\ (t,x(t)) = \lim\ -\frac{\phi(t+h,x(t)+h\dot{x}(t))-\phi(t,x(t)}{h} =$$

$$= \lim \frac{\phi((t+h) - h,(x(t)+h\dot{x}(t))-h\dot{x}(t))-\phi(t+h,x(t)+h\dot{x}(t))}{h}$$

e di qui segue

$$- \frac{d}{dt} \phi(t,x(t)) \leq \phi^\circ(t,x(t); -1, -\dot{x}(t)) =$$

$$= \max \{-(1,\dot{x}(t)) \cdot (\alpha,\beta) | (\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x(t))\} =$$

$$= -\min \{\alpha+\beta \cdot \dot{x}(t) | (\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x(t))\}.$$

Si ha poi

$$-\beta \cdot \dot{x}(t) \leq \max\{(-\beta)\cdot y | y \in F(t,x(t))\} = H(t,x(t), -\beta)$$

e quindi si ha, quasi dappertutto,

$$\frac{d}{dt} \phi(t,x(t)) \geq \min\{\alpha - H(t,x(t), -\beta) | (\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x(t))\}$$

e quindi, a causa di (1a)

(ii) $\qquad \frac{d}{dt} \phi(t,x(t)) \geq 0 \qquad$ q.d.

Se $x(o) = x_o$, da (i) e (ii) segue

(iii) $\qquad \phi(1,x(1) - f(z(1)) \geq 0.$

Se $x(1) \in C_1$, da (iii) e da (15) segue $f(x(1)) \geq f(z(1))$, ossia $z(\cdot)$ è lo calmente ottima.

In ogni caso si ha, se poniamo $\rho(x(1), C_1) = |c_1 - x(1)|, c_1 \in C_1$,

$$|z(1) - c_1| \leq |z(1) - x(1)| + |x(1) - c_1| \leq 2 |z(1) - x(1)| < \delta ,$$

e quindi $(1,c_1) \in T_\delta (z(\cdot))$ e da (15) segue

$$\phi(1, c_1) = f(c_1).$$

Detta K la costante di Lipschitz della funzione $x \to \phi(1,x) - f(x)$, si ottiene dalle formule precedenti

$$\phi(1,x(1)) = [\phi(1,x(1)) - f(x(1))] + f(x(1)) \leqq$$

$$\leqq K\,|x(1) - c_1| + f(x(1))$$

e quindi

(iv) $\qquad \phi(1,x(1)) \leqq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1).$

Se $x(o) = x_o$ e se $x(1) \in C_1 + u$, si ha $\rho(x(1), C_1) \leqq |u|$ e quindi, a causa di (iii) e (iv),

$$f(z(1)) \leqq f(x(1)) + K\,|u|$$

Con questo si è provato che da (1A) segue (B).

Supponiamo ora che valga (B). Allora esistono le costanti positive K, ε tali che

(v) $\qquad T_{3\varepsilon}(z(\cdot)) \in \Omega,$

(vi) $\qquad f(z(1)) \leqq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1)$

per ogni traiettoria $x(\cdot)\colon [0,1] \to R^n$ contenuta in $T_{3\varepsilon}(z(\cdot))$ a verificante la condizione $x(o) \models x_o$.

Osserviamo che, se esiste la funzione ϕ che si desidera definita su $T_{3\varepsilon}(z(\cdot)$ e se $x(\cdot)\colon [s,1] \to R^n$ è una traiettoria contenuta in

$T_{3\varepsilon}(z(\cdot))$ e se $x(s) = u$, dalle formule (ii) e (iv) precedenti segue

$$\phi(s,u) \leqq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1).$$

Seguendo Clarke e Vinter [1] , poniamo

$$(16) \qquad \phi(s,u) = \inf\{f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) + q \int_s^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt|$$

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \ |x(t)-z(t)|<3\varepsilon \text{ per } s \leqq t \leqq 1, \ x(s) = u\}$$

Per provare che ϕ soddisfa le nostre richieste premettiamo alcuni lemmi.

<u>Lemma 2.</u> Esiste una costante $A > 0$ tale che, dati a piacere $a > 0$, $s \in [s_1, s_2] \subset [0,1]$ e la funzione $x(\cdot): [s_1, s_2] \to R^n$ assolutamente continua che verifica le condizioni

$$T_a(x(\cdot)) \subset \Omega \quad ,$$

$$A \int_{s_1}^{s_2} \rho\,(\dot{x}(t), F(t, x(t))\,dt < a \quad ,$$

esiste una traiettoria $y(\cdot): [s_1,s_2] \to R^n$ che verifica le condizioni

$$y(s) = x(s) \quad ,$$

$$|\int_s^{s'} |\dot{y}(t) - \dot{x}(t)|dt| \leqq A|\int_s^{s'} \rho(\dot{x}(t), F(t,x(t)))dt| \quad , \quad \forall s' \in [s_1,s_2],$$

$$|y(t) - x(t)| < a \quad \text{per } s_1 \leqq t \leqq s_2.$$

Questa è una variante di noti risultati sulle inclusioni differenziali (cfr [6], [7] oltre a [1]).

Lemma 3. Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni (1), (2), (3), e (v). Supponiamo inoltre $\gamma > 0$, $|f(x)| \leqq M_1$ per $|x-z(1)| < 3\varepsilon$ e

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+AL} \quad , \quad q \geqq \frac{4M}{\varepsilon^2}(K(1+AL)\delta + 2M_1 + \gamma),$$

essendo A la costante che figura nel Lemma 2. Allora sono valide le seguenti affermazioni

i) per ogni $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ esiste una traiettoria $x(\cdot): [s,1] \to R^n$ tale che $x(s) = u$ e $|x(t) - z(t)| < \delta(1+AL)$ per $s \leqq t \leqq 1$;

ii) per ogni $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ si ha $\phi(s,u)$ = *minimo* del funzionale a secondo membro in (16) e ogni traiettoria minimizzante $x(\cdot)$ verifica la condizione $|x(t) - z(t)| \leqq 2\varepsilon$ per $s \leqq t \leqq 1$;

iii) se $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ e $x(\cdot)$ è una traiettoria minimizzante per $\phi(s,u)$, esiste $\sigma > 0$ tale che $(t,x(t)) \in T_\delta(z(\cdot))$ per $s \leqq t \leqq s + \sigma$ e

$$\phi(s,u) = \phi(t, x(t)) \quad \text{per } s \leqq t \leqq s + \sigma ; \tag{17}$$

iv) Se $|u-z(1)| < \delta$, allora

$$\phi(1,u) = f(u) + \rho(u,C_1);$$

v) se vale inoltre la condizione (vi), si ha

$$\phi(0,x_0) = f(z(1)) = \phi(t,z(t)) \quad \text{per } 0 \leqq t \leqq 1.$$

Poniamo

(18) $$g_{s,u}(x(\cdot)) = f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) + q \int_s^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt$$

Per provare i) applichiamo il Lemma 2 alla funzione

$$x(t) = z(t) + u-z(s), \quad s \leqq t \leqq 1,$$

per la quale si ha

$$r(t) = \rho(\dot{x}(t), F(t,x(t))) = \rho(\dot{z}(t), F(t,z(t)+u-z(s))) \leqq$$

$$\leqq h\,[F(t,z(t)), F(t,z(t)+ u-z(s)))] \leqq L\,|u-z(s)|$$

e quindi

$$A \int_s^1 r(t)dt \leqq AL|u-z(s)| < AL\delta = a.$$

Si ha anche $T_a(x(\cdot)) \subset T_\varepsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e quindi possiamo dedurre dal Lemma 2 che esiste una traiettoria $y(\cdot)$: $[s,1] \to R^n$ contenuta in $T_a(x(\cdot))$ tale che $y(s) = u$ e

$$|y(t) - z(t)| < \delta(1+AL) \quad \text{per } s \leqq t \leqq 1,$$

come si voleva.

Per provare ii) poniamo per ogni $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$

(16') $$E_{s,u} = \{x(\cdot); [s,1] \to R^n | x(\cdot) = \text{traiettoria}, x(s) = u,$$

$$|x(t) - z(\ )| \leqq 2\,\varepsilon \text{ per } s \leqq t \leqq 1\},$$

e dimostriamo che si ha

(16") $\phi(s,u) = \min\{g_{s,u}(x(\cdot)) | x(\cdot) \in E_{s,u}\}$.

Cominciamo a provare che, se la traiettoria $y(\cdot): [s,1] \to R^n$ verifica le condizioni $x(s) = u$ e

$$\max\{\delta(t) | s \leqq t \leqq 1\} = \delta(\bar{t}) > 2\varepsilon,$$

essendo

$$\delta(t) = |y(t) - z(t)| < 3\varepsilon \quad \text{per } s \leqq t \leqq 1,$$

allora risulta

(vii) $g_{s,u}(y(\cdot)) \geqq \gamma + \phi(s,u)$

Si ha infatti, ricordando (3),

$$\delta(\bar{t}) - \delta(t) \leqq \left| \int_t^{\bar{t}} (|\dot{y}(r)| + |\dot{z}(r)|) dr \right| \leqq 2M|\bar{t}-t|,$$

e quindi

$$\delta(t) \geqq \delta(\bar{t}) - 2M|\bar{t}-t| > 2\varepsilon - 2M|\bar{t}-t|$$

Ne segue che si ha $\delta(t) - \varepsilon > 0$ per ogni t verificante la condizione

$$|\bar{t}-t| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Osserviamo che si ha per $t = s$

$$\varepsilon > \delta > \delta(s) > 2\varepsilon - 2M\,|\bar{t} - s|$$

e quindi

$$\bar{t} - \frac{\varepsilon}{2M} > s \ , \quad \varepsilon < 2M \, .$$

Da quanto sopra segue

$$\int_s^1 (\delta(t) - \varepsilon)^+ \, dt \geqq \int_{\bar{t} - \frac{\varepsilon}{2M}}^{\bar{t}} [\varepsilon - 2M(\bar{t}-t)] \, dt = \frac{\varepsilon^2}{4M}$$

Sia ora $x(\cdot)$ una traiettoria che soddisfa le condizioni in i). Allora si ha

$$g_{s,u}(y(\cdot)) - g_{s,u}(x(\cdot)) = f(y(1)) + K\rho(y(1),C_1) +$$

$$+ q \int_s^1 (\delta(t) - \varepsilon)^+ dt - f(x(1)) - K\rho(x(1), C_1) - 0 \geqq$$

$$\geqq \frac{q\varepsilon^2}{4M} - 2M_1 - K\,|x(1) - z(1)| >$$

$$> \frac{q\varepsilon^2}{4M} - 2M_1 - K\delta(1 + AL) \geqq \gamma$$

e quindi è vera la (vii).

Di conseguenza si ha

$$\phi(s,u) = \inf\{g_{s,u}(x(\cdot))\,|\,x(\cdot) \in E_{s,u}\}$$

Per provare che vale (16") prendiamo una successione $x_j(\cdot) \in E_{s,u}$ per

cui sia

$$\phi(s,u) \leq g_{s,u}(x_j(\cdot)) < \phi(s,u) + \frac{1}{j} .$$

Allora si ha per $s \leq t \leq 1$

$$x_j(s) = u,$$

$$\dot{x}_j(t) \in F(t,x_j(t)) \quad \text{q.d.} ,$$

$$|\dot{x}_j(t)| \leq M \quad \text{q.d.} ,$$

$$|x_j(t) - z(t)| \leq 2\varepsilon$$

e di qui segue (cfr [7] per esempio) che si può estrarre una sottosucces sione uniformemente convergente alla traiettoria $\bar{x}(\cdot) \in E_{s,u}$ per la qua le si ha $\phi(s,u) = g_{s,u}(\bar{x}(\cdot))$.

Proviamo iii). Per la traiettoria $x(\cdot)$ si ha $x(\cdot) \in E_{s,u}$ e inoltre si ha per $s \leq t \leq 1$

$$\phi(s,u) = g_{s,u}(x(\cdot)) = q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + [q \int_t^1 (\dots)^+ dr +$$

$$+ f(x(1)) + K\rho\,(x(1), C_1)] =$$

$$= q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + g_{t,x(t)}(x(\cdot)) \geq$$

$$\geq q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + \phi(t,x(t)) ,$$

poiché la restrizione di $x(\cdot)$ all'intervallo $[t,1]$ appartiene a $E_{t,x(t)}$.

Sia $y(\cdot) \in E_{t,x(t)}$ tale che $\phi(t,x(t)) = g_{t,x(t)}(y(\cdot))$.

Posto

$$\bar{x}(t') = \begin{cases} x(t') \text{ per } s \leq t' \leq t \ , \\ y(t') \text{ per } t \leq t' \leq 1 \ , \end{cases}$$

si ha $\bar{x}(\cdot) \in E_{s,u}$ e quindi

$$\phi(s,u) \leq g_{s,u}(\bar{x}(\cdot)) = q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ \, dr + g_{t,x(t)} (y(\cdot)) =$$

$$= q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + \phi(t,x(t))$$

Pertanto abbiamo provato la formula

$$(17') \qquad \phi(s,u) = q \int_s^t (|x(r)-z(r)|-\varepsilon)^+ dr + \phi(t,x(t)) \ , \text{ per } s \leq t \leq 1,$$

dove $x(\cdot) \in E_{s,u}$ è minimizzante per $\phi(s,u)$.

Se si prende $\sigma > 0$ tale che sia $|x(r) - z(r)| < \varepsilon$ per $s \leq r \leq s + \sigma$, da (17') segue (17).

La iv) è evidente da (16).

Proviamo v). Siccome $z(\cdot) \in E_{0,x_0}$, si ha

$$\phi(0,x_0) \leq g_{0,x_0} (z(\cdot)) = f(z(1))$$

Inoltre da (vi) segue $f(z(1)) \leq g_{0,x_0}(x(\cdot))$ per ogni $x(\cdot) \ \ E_{0,x_0}$ e quindi

$$f(z(1)) \leq \phi(0,x_0)$$

Pertanto si ha

$$f(z(1)) = \phi(o,x_o) = g_{o,x_o}(z(\cdot))$$

e il resto segue da (17').

Questo conclude la dimostrazione del Lemma 3.

Lemma 4. Sotto le ipotesi del Lemma 3, la funzione $\phi: T_\delta(z(\cdot)) \to R$ definita in (16) è localmente lipschitziana.

Proviamo prima la lipschitzianità rispetto a u mediante il Lemma 2. Sia $\phi(s,u) = g_{s,u}(x(\cdot))$, con $x(\cdot) \in E_{s,u}$. Poniamo

$$\bar{x}(t) = x(t) + \bar{u} - u \quad , \quad s \leqq t \leqq 1.$$

Allora si ha, poiché $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$,

$$r(t) = \rho\,(\dot{\bar{x}}(t), F(t,\bar{x}(t)) = \rho(\dot{x}(t), F(t,x(t) + \bar{u}-u)) \leqq$$

$$\leqq h\,[F(t,x(t)), F(t,x(t) + \bar{u}-u)] \leqq L|\bar{u}-u|$$

e quindi

$$A \int_s^1 r(t)dt \leqq AL|\bar{u}-u| < AL\delta = a,$$

se supponiamo $|\bar{u}-u| < \delta$. In tal caso si ha anche $T_a(\bar{x}(\cdot)) \subset T_{3\varepsilon}(z(\cdot)) \subset \Omega$ e quindi possiamo applicare il Lemma 2 e ottenere una traiettoria $y(\cdot) : [s,1] \to R^n$ tale che $y(s) = \bar{x}(s) = \bar{u}$ e

$$|y(t) - \bar{x}(t)| \leq \int_s^1 |\dot{y}(t) - \dot{x}(t)|dt \leq AL|\bar{u}-u| \quad , \quad s \leq t \leq 1,$$

$$y(\cdot) \subset T_a(\bar{x}(\cdot)) \subset T_{3\varepsilon}(z(\cdot)),$$

$$|y(t) - x(t)| \leq (AL+1)|\bar{u}-u| \quad , \quad s \leq t \leq 1.$$

Di qui e da (16) segue, se L_1 è la costante di Lipschitz per f,

$$\phi(s,\bar{u}) \leq g_{s,\bar{u}}(y(\cdot)) \ ,$$

$$\phi(s,\bar{u}) - \phi(s,u) \leq g_{s,\bar{u}}(y(\cdot)) - g_{s,u}(x(\cdot)) \leq$$

$$\leq q \int_s^1 |y(t) - x(t)|dt + (L_1+K)|y(1)-x(1)| \leq$$

$$\leq (AL+1)(q+L_1+K)|\bar{u}-u|$$

Pertanto si ha, con $L_2 = (AL+1)(q+L_1+K)$,

(viii) $$|\phi(s,u)-\phi(s,\bar{u})| \leq L_2|u-\bar{u}| \quad , \text{ se } |u-\bar{u}| < \delta.$$

Passiamo ora al caso generale. Sia $(\bar{s},\bar{u}) \in T_\delta(z(\cdot))$, $s < \bar{s}$. Se $\phi(s,u) = g_{s,u}(x(\cdot))$, con $x(\cdot) \in E_{s,u}$, si ha dal Lemma 3

$$\phi(s,u) = \phi(\bar{s},x(\bar{s})) \quad , \quad \text{se} \quad |s-\bar{s}| \leq \sigma.$$

Supponiamo inoltre

$$|s-\bar{s}| < \frac{\delta}{2M} \quad , \quad |u-\bar{u}| < \frac{\delta}{2} \ .$$

Allora otteniamo

$$|x(\bar{s}) - \bar{u}| \leq |x(\bar{s}) - x(s)| + |u-\bar{u}| \leq$$

$$\leq M|s-\bar{s}| + |u-\bar{u}| < \delta$$

e quindi, utilizzando (viii),

$$|\phi(s,u) - \phi(\bar{s},\bar{u})| = |\phi(\bar{s},x(\bar{s})) - \phi(\bar{s},\bar{u})| \leq$$

$$\leq L_2 \; |x(\bar{s}) - \bar{u}| \leq L_2(M|s-\bar{s}| + |u-\bar{u}|).$$

Questo conclude la dimostrazione.

<u>Lemma 5</u>. (B) implica (5A) e (4A).

Se è vero (B), possiamo supporre soddisfatte le ipotesi del Lemma 3 e del Lemma 4. Dunque la formula (16) definisce ϕ: $T_\delta(z(\cdot)) \to R$ localmente lipschitziana che verifica (15). Proviamo che verifica anche (5a).

Sia $(\alpha,\beta) \in D^-\phi(s,u)$, con (s,u) punto interno a $T_\delta(z(\cdot))$ e quindi con $0 < s < 1$, e sia $v \in F(s,u)$. Poniamo

$$y(t) = u + (t-s)v \qquad , \bar{s} \leq t \leq s.$$

Allora si ha, ricordando la formula (3),

$$r(t) = \rho(\dot{y}(t), F(t,y(t)) = \rho(v, F(t,u + (t-s)v)) \leq 2M,$$

$$A\int_{\bar{s}}^{s} r(t)dt \leq 2AM\,(s-\bar{s}).$$

Se fissiamo a e $\bar{s}$ in modo da soddisfare le condizioni

$$o < a \leq \frac{A}{1+A} (\delta - |u-z(s)|) \quad ,$$

$$o < s - \bar{s} < \frac{a}{2AM} \quad ,$$

abbiamo $T_a(y(\cdot)) \subset T_\delta(z(\cdot)) \subset \Omega$ e quindi possiamo applicare il Lemma 2 e ottenere una traiettoria $\bar{y}(\cdot): [\bar{s},s] \to R^n$ che verifica le condizioni

$$\bar{y}(s) = u \ ,$$

(ix) $$\int_t^s |\bar{y}(r)-v|dr \leq A \int_t^s \rho(v,F(r,u+(r-s)v))dr \quad \text{per } \bar{s} \leq t \leq s,$$

(x) $$\bar{y}(\cdot) \subset T_a(y(\cdot)) \subset T_\delta(z(\cdot)) \subset T_\varepsilon(z(\cdot)).$$

Sia $y^*(\cdot) \in E_{s,u}$ tale che $\phi(s,u) = g_{s,u}(y^*(\cdot))$. Allora le due traiettorie $\bar{y}(\cdot)$ e $y^*(\cdot)$ si incollano in una traiettoria $\tilde{y}(\cdot) \in E_{\bar{s},\bar{y}(\bar{s})}$ per la quale si ha, ricordando la (x), per $\bar{s} \leq t < s$,

$$\phi(t,\bar{y}(t)) \leq g_{t,\bar{y}(t)}(\tilde{y}(\cdot)) = g_{s,u}(y^*(\cdot)) = \phi(s,u).$$

Pertanto si ha

(xi) $$\phi(t,\bar{y}(t)) \leq \phi(s,u) \quad \text{per} \quad \bar{s} \leq t < s.$$

Dalla definizione di $D^-\phi(s,u)$ si ha

$$\frac{\min\{0,\ \phi(t,x) - \phi(s,u) - (\alpha,\beta)\cdot(t-s,\ x-u)\}}{|(t-s,\ x-u)|} = \varepsilon(t-s,x-u) \xrightarrow[(t,x)\to(s,u)]{} 0,$$

e quindi

$$\phi(t,x) - \phi(s,u) - (\alpha,\beta)\cdot(t-s,\ x-a) \geq |t-s,x-u)|\varepsilon(t-s,x-u).$$

Se poniamo $x = \bar{y}(t)$ e usiamo (xi), otteniamo

$$0 \geqq \phi(t,\bar{y}(t)) - \phi(s,u) \geqq$$

$$\geqq (\alpha,\beta) \cdot (t-s,\ \bar{y}(t) - u) + |(t-s,\ \bar{y}(t)-u)|\varepsilon(t-s,\bar{y}(t)-u).$$

Poniamo $h = s - t > 0$. Allora si ha

$$\left| \frac{\bar{y}(s-h)-u}{h} \right| \leqq \frac{1}{h} \int_{s-h}^{s} |\dot{\bar{y}}(t)|\,dt \leqq M \quad ,$$

$$\frac{1}{h}\, |(-h,\ \bar{y}(s-h)-u)|\,\varepsilon(-h,\ \bar{y}(s-h)-u) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad ,$$

$$\frac{\bar{y}(s-h)-u}{h} = -\frac{1}{h} \int_{s-h}^{s} \dot{\bar{y}}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{s-h}^{s} [\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)]\,dt - v \ ,$$

e si ha anche, ricordando (1) e (ix),

$$\left| \frac{1}{h} \int_{s-h}^{s} [\dot{y}(t) - \dot{\bar{y}}(t)]dt \right| \leqq \frac{A}{h} \int_{s-h}^{s} \rho(v,F(t,u+(t-s)v))dt \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{h} \int_{s-h}^{s} h[\ F(s,u),\ F(t,u + (t-s)v)\ ]\ dt \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Pertanto si può concludere che riesce

$$0 \geqq (\alpha,\beta) \cdot (-1,\ -v)$$

e quindi

$$\alpha \geqq (-\beta)\cdot v \quad , \quad \forall v \in F(s,u) ,$$

$$\alpha \geqq \max\{(-\beta)\cdot v| \quad v \in F(s,u)\} = H(s,u,-\beta).$$

Questo prova (5a).

Supponiamo ora $(\alpha,\beta) = \nabla\phi(s,u)$. Da quanto visto sopra segue

$$\alpha - H(s,u,-\beta) \geqq 0.$$

Sia $x(\cdot) \in E_{s,u}$ minimizzante per $\phi(s,u)$. Allora si ha dal Lemma 3, formu la (17), ricordando che è $s < 1$

$$\text{(xii)} \qquad \phi(s,u) = \phi(t,x(t)) \quad \text{per} \quad s < t \leqq s + \sigma.$$

Dalla definizione di gradiente

$$\frac{\phi(t,x)-\phi(s,u)-(\alpha,\beta)\cdot(t-s,x-u)}{|t-s,\ x-u)|} = \varepsilon\,(t-s,x-u) \xrightarrow[(t,x)\to(s,u)]{} 0$$

e da (xii) si ottiene, con $h = t - s > 0$,

$$-(\alpha,\beta)\cdot(1, \frac{x(s+h) - x(s)}{h})=$$

$$= |(1, \frac{x(s+h) - x(s)}{h})|\varepsilon(h,x(s+h)-x(s) = \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

e quindi

$$\varepsilon_1(h) + \alpha = (-\beta)\cdot\frac{x(s+h)-x(s)}{h} = \frac{1}{h}\int_s^{s+h}(-\beta)\cdot\dot{x}(t)dt \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{h}\int_s^{s+h}\max_{v\in F(t,x(t))}[(-\beta)\cdot v]\,dt = \frac{1}{h}\int_s^{s+h} H(t,x(t),\,-\beta)dt.$$

Siccome H è continua, di qui segue

$$\alpha \leqq H(s,\ u,\ -\beta),$$

e perciò si può concludere che

$$\alpha - H(s,\ u,\ -\beta) = 0,$$

come si voleva.

Lemma 6. (2a) implica (1a) e (4a) implica (3a).

Proviamo che (2a) implica (1a). Fissiamo $(\alpha\ \beta)\in\partial\,\phi(t,x)$. Osserviamo che (2a) si può scrivere nelle forme equivalenti

$$\phi_t \geqq \max_{v\in F(t,x)}(-\phi_x)\cdot v = -\min_{v\in F(t,x)}\phi_x\cdot v,$$

$$\text{(2a')}\qquad \phi_t + \phi_x\cdot v \geqq 0\quad,\quad \forall\, v\in F(t,x).$$

Analogamente (1a) è equivalente a

$$\text{(1a')}\qquad \alpha + \beta\cdot v \geqq 0\quad \text{per ogni}\quad (\alpha,\beta)\in\partial\phi(t,x)\ \text{e}\ v\in F(t,x).$$

Dalla definizione di $\partial\,\phi(t,x)$ segue che si ha

$$(\alpha,\beta) = \sum_{o}^{u} \lambda_k \xi_k \quad , \sum^{n} \lambda_k = 1, \; \lambda_k \geqq 0,$$

$$\xi_k = \lim_{i\to\infty} \nabla\phi(t_i, x_i), \; (t_i, x_i) \longrightarrow (t,x),$$

mentre dalla continuità di F segue

$$F(t,x) \subset F(t_i, x_i) + \varepsilon_i B \quad , \quad \varepsilon_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 .$$

Allora possiamo rappresentare $v \in F(t,x)$ nella forma

$$v = v_j + \varepsilon_i b_i \quad , \quad v_j \in F(t_i, x_i), \; |b_i| \leqq 1,$$

e da (2a') otteniamo

$$0 \leqq \nabla\phi(t_i, x_i) \cdot (1 , v_i) =$$

$$= \nabla\phi(t_i, x_i) \cdot (1 ,v) - \varepsilon_i \nabla\phi(t_i, x_i) \cdot (1, b_i).$$

Siccome $|\nabla\phi(t_i, x_i)| \leqq L_2$ = costante di Lipschitz di ϕ, si ottiene

$$0 \leqq \xi_k \cdot (1, \; v)$$

e ancora

$$0 \leqq \sum_{o}^{n} \lambda_k \xi_k \;(1,v) = (\alpha,\beta) \cdot (1,v) = \alpha + \beta \cdot v .$$

Questo prova (1a') e quindi (1a).

Per provare che (3a) segue da (4a) resta la prova che da (4a) segue la possibilità di trovare qualche $(\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x)$ per cui sia

$$\alpha - H(t,x, - \beta) = 0.$$

Per (4a), esiste una successione $(t_i,x_i) \to (t,x)$ tale che $\nabla\phi(t_i,x_i) =$ $= (\alpha_j\ \beta_j)$ verifica (4a). Siccome si ha $|\nabla\phi(t_i,x_i)| \leq L_2$, possiamo supporre

$$(\alpha_i,\beta_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} (\alpha,\beta) \quad ,$$

eventualmente passando a una sottosuccessione. Dalla semicontinuità superiore di $\partial\phi$ segue che $(\alpha,\beta) \in \partial\phi(t,x)$ e dalla continuità di H segue

$$\alpha - H(t,x,-\beta) = 0,$$

come si voleva.

Dai lemmi precedenti e dalla Proposizione 1 segue che si ha

$$(1A) \to (B) \to (4A) \to (3A) \to (1A),$$

$$(B) \to (5A) \to (2A) \to (1\,A),$$

e questo conclude la dimostrazione del Teorema 2.

Da (1A) segue anche (15'), poiché si da da (ii) e da (15), per $0 \leq t \leq 1$,

$$\phi(t,z(t)) - \phi(0,x_o) = \int_0^t \frac{d}{ds}\phi \geqq 0,$$

$$\phi(1,z(1)) - \phi(t,z(t)) = \int_t^1 \frac{d}{ds}\phi \geqq 0,$$

$$\phi(0,x_o) = f(z(1)) = \phi(1,z(1)).$$

5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

Supponiamo che (P) non sia calmo in $z(\cdot)$ e proviamo che non è fortemente normale.

Per ipotesi esiste $\varepsilon_o > 0$ tale che $T_{\varepsilon_o}(z(\cdot)) \subset \Omega$ e $z(\cdot)$ è soluzione di (P) in $T_{\varepsilon_o}(z(\cdot))$. Supponiamo $\varepsilon_o \leqq 1$.

Applichiamo il Lemma 3 sotto le condizioni

$$0 < 3\varepsilon < \varepsilon_o, \ \gamma = \varepsilon \ , \ K = \frac{1}{\varepsilon^3} \ , \ \delta = \frac{\varepsilon^4}{1+AL} \ ,$$

$$q = \frac{4M}{\varepsilon^2}(2M_1 + 3\varepsilon) = q(\varepsilon)$$

Esiste $y(\cdot) \in E_{o,x_o}$ tale che

$$\phi(o,x_o) = g_{o,x_o}(y(o)) =$$
$$= f(y(1)) + \varepsilon^{-3}\rho(y(1),C_1) + q(\varepsilon)\int_0^1 (|y(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt \leqq$$
$$\leqq f(x(1)) + \varepsilon^{-3}\rho(x(1),C_1) + q(\varepsilon)\int_0^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt$$

per ogni traiettoria $x(\cdot) \subset T_{\varepsilon o}(z(\cdot))$ con $x(o) = x_o$. Se moltiplichiamo il tutto per ε^3, otteniamo che $y(\cdot)$ risolve il problema

$$(P_\varepsilon) \quad \min\{\varepsilon^3 f(x(1)) + \rho(x(1), C_1) + q(\varepsilon)\varepsilon^3 \int_0^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt \,|\, x(o) = x_o,$$

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \text{ q.d.}, \ |x(t) - y(t)| < \varepsilon \text{ per } 0 \leqq t \leqq 1\}$$

Osserviamo ora, con Clarke e Vinter [1] , che si ha per ogni $\xi \in R^n$

$$\rho(\xi,C_1) = \min\{|\xi-c| \mid c \in C_1\} =$$

$$= \min\{|\xi-x_0(1)| \mid \dot{x}_0(t) = 0 \text{ per } 0 \leq t \leq 1,\ x_0(0) \in C_1\}.$$

Di conseguenza possiamo scrivere (P_ε) nella forma

$$(P'_\varepsilon) \quad \min\{\varepsilon^3 f(x(1)) + |x(1)-x_0(1)| + q(\varepsilon)\varepsilon^3 \int_0^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+ dt \mid x(o) = x_0,$$

$$x_0(0) \in C_1,\ \dot{x}(t) \in F(t,x(t)),\ \dot{x}_0(t) = 0,\ |x(t)-y(t)|<\varepsilon \text{ per } 0\leq t\leq 1\}$$

e una soluzione di (P'_ε) è data da

$$t \to (c_1, y(t)) = (y_0(t), y(t)),$$

con $c_1 \in C_1$ tale che

$$\text{(i)} \qquad \rho(y(1), C_1) = |y(1) - c_1|.$$

Tale soluzione deve verificare le condizioni di Hamilton (cfr. [8] per esempio) con Hamiltoniana

$$\tilde{H}(t, (x_0,x), (p_0,p)) = \max\{p_0.o + p.v \mid v \in F(t,x)\} =$$

$$= H(t,x,p).$$

Dunque esiste $(p_0(\cdot), p(\cdot)): [0,1] \to R^n$ assolutamente continua tale che

$$(-\dot p_0,\ -\dot p,\ \dot y_0,\ \dot y) \in \partial\tilde H\ (t,\ y_0,\ y,\ p_0,\ p) - q(\varepsilon)\varepsilon^3\partial(|y-z|-\varepsilon)^+,$$

$$(p_0(0),\ p(o)) \in N\ (C_1 x\{x_0\};\ (y_0(o),\ y(o))),$$

$$-(p_0(1),\ p(1)) \in \partial\,[\ \varepsilon^3 f(y(1)) + |y(1) - y_0(1)|\ ]\ .$$

Ne seguono le condizioni

(ii) $\quad (-\dot p,\ \dot y) \in \partial H(t,y,p) - q(\varepsilon)\varepsilon^3\ \partial(|y-z|-\varepsilon)^+,$

(iii) $\quad -p(1) \in \varepsilon^3\ \partial f(y(1)) + \partial_y\ |y(1) - y_0(1)|.$

Proviamo che $y(1) \notin C_1$. Se così non fosse, la traiettoria $y(\cdot)$ sarebbe ammissibile per (P) e quindi si avrebbe

$$f(z(1)) \leq f(y(1)) \leq f(y(1)) + \varepsilon^{-3}\rho(y(1),\ C_1) +$$

$$+\ q(\varepsilon)\int_0^1 (|y(t)-z(x)|-\varepsilon)^+dt = \phi(o,x_0).$$

Ma per ipotesi (P) non è calmo in $z(\cdot)$. Quindi esiste una traiettoria $x(\cdot)$: $[0,1] \to R^n$ tale che $x(0) = x_0$ e

$$|x(t) - z(t)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$f(z(1)) > \frac{1}{\varepsilon^3}\,\rho(x(1),\ C_1) + f(x(1)).$$

Di qui si ottiene

$$f(z(1)) > f(x(1)) + \varepsilon^{-3}\rho(x(1),C_1) + q(\varepsilon)\int_0^1 (|x(t)-z(t)|-\varepsilon)^+dt \geq \phi(0,x_0)$$

e questo contraddice la disuguaglianza precedente.

Ora vogliamo "passare al limite per $\varepsilon \to o$" in (ii) e (iii). Osserviamo che si ha

(iv) $\quad \partial(|y-z|-\varepsilon)^{+} \subset B$,

(v) $\quad \partial f(y) \subset L_1 B$,

se L_1 è la costante di Lipschitz per f.
Siccome $y(1) \neq c_1 = y_0(1)$, si ha anche

(vi) $\quad \partial_y |y(1) - y_0(1)| = \dfrac{y(1)-c_1}{|y(1)-c_1|}$,

e quindi

(iii') $\quad -p(1) \in \varepsilon^3 \partial f(y(1)) + \dfrac{y(1)-c_1}{|y(1)-c_1|}$.

da (iii') e (v) segue

(vii) $\quad |p(1)| \leq L_1 + 1$,

mentre da (ii) e (iv) segue,per unacostante $M_2 \geq 0$,

$$|\dot{p}(t)| \leq L_1 |p(t)| + M_2$$

e quindi, mediante il lemma di Gronwall, si ottiene, per una costante $M_3 \geq 0$,

(viii) $\quad |\dot{p}(t)| \leq M_3 \quad$ q.d.

Si ha anche

$$\text{(ix)} \qquad |y(1)| \leqq |z(1)| + 2\varepsilon \leqq |z(1)| + 1,$$

$$\text{(x)} \qquad |\dot{y}(t)| \leqq M \quad \text{q.d.},$$

$$\text{(xi)} \qquad |y(t) - z(t)| \leqq 2\varepsilon.$$

Da (ii), (vii), (ix), (viii), (x) segue che esiste una successione $\varepsilon_i \to 0+$ per $i \to \infty$ tale che, dette $y_i(\cdot)$ e $p_i(\cdot)$ le funzioni corrispondenti, riesce

$$y_i(t) \to z(t), \; p_i(t) \to p(t) \qquad \text{per } i \to \infty$$

uniformemente per $0 \leqq t \leqq 1$, con $p(\cdot)$ assolutamente continua che verifica la condizione

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial H(t,z,p) \qquad \text{q.d.}$$

Si ha poi

$$-\, p_i(1) = \varepsilon_i^3 q_i + \frac{y_i(1)-c_i}{|y_i(1)-c_i|} \;, \quad |q_i| \leqq L_1$$

e di qui segue, ricordando la definizione di cono normale,

$$-p(1) \in N(C_1; z(1)) \;, \quad |p(1)| = 1.$$

Questo prova che (P) non è strettamente normale.

6. SOLUZIONI GENERALIZZATE SECONDO CRANDALL-LIONS

Esponiamo alcuni risultati di [2] che motivano la considerazione della condizione (5a) nel Teorema 2.

Fissiamo un aperto $0 \subset R^n$ e consideriamo le successioni di funzioni continue

$$G_i : 0 \times R \times R^n \to R,$$

$$u_i : 0 \to R,$$

che supponiamo localmente uniformemente convergenti rispettivamente alle funzioni continue G e u. Allora si hanno i seguenti teoremi 4 e 5.

Teorema 4. Se per ogni i le funzioni G_i e u_i verificano la condizione

$$- G_i(x,u_i(x),\xi) \leqq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^- u_i(x),$$

allora la stessa condizione vale per G e u.

Se per ogni i è verificata la condizione

$$G_i(x,u_i(x), \xi) \leqq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^+ u_i(x),$$

allora la stessa condizione vale per G e u.

Teorema 5. Supponiamo $u_i \in C^2(0)$ per ogni i e

$$0 < \varepsilon_i \longrightarrow o \quad \text{per } i \to \infty.$$

Se le funzioni G_i e u_i verificano la condizione

$$\varepsilon_i \Delta u_i(x) \leq G_i(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) \qquad \text{per } x \in 0,$$

allora G e u verificano la condizione

$$(19-) \qquad - G(x, u(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^- u(x).$$

Se G_i e u_i verificano la condizione

$$G_i(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) \leq \varepsilon_i \Delta u_i(x) \qquad \text{per } x \in 0$$

allora G e u verificano la condizione

$$(19+) \qquad G(x, u(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^+ u(x).$$

Osservazione. Il teorema 5 vale ancora se si sostituisce $\Delta u_i(x)$ con

$$\Delta' u_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 u_i(x) \quad , \quad 1 \leq m \leq n.$$

In tal caso è sufficiente che $u_i \in C^1(0)$ e che esistano e siano continue le derivate $(\partial/\partial x_k)^2 u_i$ per $1 \leq k \leq m$.

Per la dimostrazione dei teoremi precedenti, in [2] viene utilizzata la seguente caratterizzazione delle condizioni (19+)

Teorema 6. Supponiamo u e G continue. Allora sono equivalenti le affermazioni

i) vale (19±);

ii) se $0 \leq \phi \in C_0^\infty(0)$, $k \in R$, $\max\{\pm \phi(x)[u(x)-k]\} > 0$, allora esiste

$y \in O$ tale che

$$(20\pm)\quad \begin{cases} \pm\,\phi(y)\,[u(y)-k] = \max_{x}\{\pm\phi(x)[u(x)-k]\}, \\ \pm\, G(y,u(y),\, -\dfrac{u(y)-k}{\phi(y)}\,\nabla\phi(y)) \leq 0. \end{cases}$$

La condizione ii) è assunta in [2] come definizione iniziale di soluzione generalizzata. In [2] e [5] sono ottenuti anche diversi risultati di unicità per le soluzioni generalizzate del problema di Dirichlet. In [5] viene usato il Teorema 5 per provare vari teoremi di esistenza. Ci limitiamo a ricordare un risultato enunciato in [5] (Theorem 9.1, Remark 9.1, pag. 204-5).

Sia $O \subset R^n$ aperto, $T > 0$, $Q = [0,T[\times O$. Supponiamo che la funzione

$$\bar{Q} \times R^n \ni (t,x,p) \longrightarrow H(t,x,p) \in R$$

sia *convessa* rispetto a p e verifichi le condizioni

$$H(t,x,0) = 0 \quad \text{in } \bar{Q},$$

$$|H(t',x',p')-H(t,x,p)| \leq C(1+|p|)\,|(t',x',p')-(t,x,p)|,$$

$$\inf_{(t,x)\in\bar{Q}} H(t,x,p) \xrightarrow[|p|\to\infty]{} +\infty .$$

Allora si ha il seguente

<u>Teorema 7</u>. Se H verifica le condizioni precedenti e se esiste $v : \bar{Q} \to R$ lipschitziana e tale che

$$v_t + H(t,x,\nabla_x v) \leq 0 \qquad \text{q.d. in } Q,$$

allora esiste $u : \bar{Q} \to R$ lipschitziana e tale che

$$u = v \quad \text{su } \partial Q \setminus (\{T\} \times 0),$$

$$u \geq v \quad \text{su } \bar{Q},$$

$$\pm[\alpha + H(t,x,\beta)] \leq 0 \quad \text{per ogni } (\alpha,\beta) \in D\, u(t,x)$$

e per ogni (t,x) interno a Q.

Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Consideriamo il problema in R

$$(P_1) \qquad \min\{|x(1)| \mid |\dot{x}(t)| \leq 1, \ x(0) = 0, \ x(1) \in [1, 2]\}.$$

Dalle condizioni

$$1 \leq x(1) = \int_0^1 \dot{x}(t)dt \leq 1$$

segue $\dot{x}(t) = 1$ q.d. e quindi che $z(t) = t$ è soluzione.

Se $x(\cdot): [0,1] \to R$ è una traiettoria tale che $x(0) = 0$, allora riesce $|x(1)| \leq 1$ e quindi

$$|z(1)| = 1 = (1-|x(1)|) + |x(1)| \leq |1-x(1)| + |x(1)| =$$

$$= |x(1)| + \rho\,(x(1), [1,2])$$

Dunque il problema è calmo in $z(\cdot)$.

L'Hamiltoniana è data da $H(x,p) = |p|$ e si ha

$$\partial H(x,p) = \{o\} \times \begin{cases} \left\{\frac{p}{|p|}\right\} & \text{se } p \neq 0 \\ [-1,1] & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

Si ha inoltre $N([1,2];1) =]-\infty,0]$.

Allora la funzione $p(t) \equiv 1$ per $0 \leqq t \leqq 1$ è soluzione del problema

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial H(z,p) \quad , \quad -p(1) \in N([1,2]; z(1))$$

Questo prova che il problema (P_1) non è strettamente normale.

Esempio 2. Sia O aperto in R^n e $g \in C^1(O)$ tale che

$$|g(x)| + |\nabla g(x)| > 0 \quad \text{per ogni } x \in O.$$

Posto $O^\pm = \{x \in O \mid \pm g(x) > 0\}$, supponiamo $u^\pm \in C^1(\bar{O}^\pm)$ tali che

$$u^+(x) = u^-(x) \quad \text{se } g(x) = 0$$

e poniamo

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } x \in O^+, \\ u^-(x) & \text{se } x \in O^-. \end{cases}$$

Allora si ha $\alpha \in D^\pm u(x)$, $g(x) = 0$, se e solo se

$$\begin{cases} \pm\nabla u^+(x) \cdot \nabla g(x) \leqq \pm\, \alpha \cdot \nabla g(x) \leqq \pm\nabla u^-(x) \cdot \nabla g(x) , \\ \nabla u^\pm(x) \cdot h = \alpha \cdot h \quad \text{se } \nabla g(x) \cdot h = 0. \end{cases}$$

In particolare, se $g(x) = x_n$, le condizioni precedenti si scrivono nella forma

$$\begin{cases} \pm D_n u^+(x) \leqq \pm \alpha_n \leqq \pm D_n u^-(x); \\ D_j u^\pm(x) = \alpha_j \quad \text{per } 1 \leqq j \leqq n-1 \end{cases}$$

Per la verifica rimandiamo a [2], I.3.

Esempio 3. La funzione u definita su $R \times R^n$ da

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqq |x| \\ t - |x| & \text{se } t \geqq |x| \end{cases}$$

è lipschitziana e verifica la condizione

$$u_t - |\nabla_x u| = 0 \qquad \text{q.d.}$$

Se $t_o > 0$, si verifica che risce $(\alpha,\beta) \in D^+u(t,0)$ se e solo se

$$\alpha = 1 \geqq |\beta| .$$

Ne segue che

$$\alpha - |\beta| = 1-|\beta| > 0 \quad \text{se } |\beta| < 1,$$

e quindi che non vale la condizione (19+).

Siccome si ha $D^-u(t_o,o) = \emptyset$, vale la (19-).

Esempio 4. Consideriamo il problema in R

$$\phi(s,u) = \min\{1-|x(1)| \,\big|\, |\dot{x}(t)|\leqq 1 \text{ per } s \leqq t \leqq 1,\ x(s) = u\}$$

per $0 \leqq s \leqq 1$, $u \in R$.

Si verifica che il problema ha soluzione. Si ha $H(x,p) = |p|$ e quindi, se $x(\cdot): [s,1] \to R$ è una soluzione, esiste $p(\cdot): [s,1] \to R$ tale che

$$(-\dot{p},\dot{x}) \in \{o\} \times \partial|p| \quad , \quad -p(1) \in -\partial|x(1)|$$

Pertanto si ha $\dot{p} = 0$ q.d. e quindi $p(t) = p(1)$ per $s \leqq t \leqq 1$.

Se $x(1) > 0$, si ha $p(1) = 1 = p(t)$ e quindi $\dot{x}(t) = 1$,

$x(t) = u + t - s$ per $s \leqq t \leqq 1$,

$0 < x(1) = u + 1 - s$,

$1-|x(1)| = s - u$.

Se $x(1) < 0$, si ha $p(1) = -1 = p(t)$ e quindi $\dot{x}(t) = -1$,

$x(t) = u + s - t$ per $s \leqq t \leqq 1$,

$0 > x(1) = u + s - 1$

$1 - |x(1)| = s + u$.

Siccome $s + u \leqq s - u$ se e solo se $u \leqq 0$, si ottiene

$$\phi(s,u) = s - |u| \quad \text{per } 0 \leqq s \leqq 1,\ u \in R.$$

Se $z(t) = t$ per $0 \leqq t \leqq 1$, allora $z(\cdot)$ è soluzione per $\Phi(0,0)$ e Φ verifica le condizioni del Teorema 2, con $C_1 = R$, ma non è soluzione generalizzata secondo Crandall-Lions [2] dell'equazione $\phi_t-|-\phi_x| = 0$, come prova l'Esempio 3.

Tuttavia, consideriamo il problema

$$\phi_\varepsilon(s,u) = \min\{1-|x(1)| \,\big|\, |\dot{x}(t)| \leqq 1,\ |x(t) - t| \leqq \varepsilon \text{ per } s \leqq t \leqq 1,\ x(s)=u\}$$

con $0 < \varepsilon < 1$. Questo ha soluzione data da

$$\phi_\varepsilon(s,u) = s - u \quad \text{per } 0 \leqq s \leqq 1,\quad u \in R$$

Ora è $\phi_\varepsilon \in C^1$ e quindi è anche soluzione secondo Crandall-Lions. Osserviamo che $\phi(s,u) < \phi_\varepsilon(s,u)$ per $u < 0$.

Esempio 5. Consideriamo il problema in R^2

$$\min\{x_2(1) \,|\, \dot{x}_1 = 0,\ |\dot{x}_2| \leqq |x_1|,\ x_1(o) = 0 = x_2(o)\}.$$

La sua unica soluzione è $z(t) = (0,0)$ e il problema è calmo in $z(\cdot)$, poiché $C_1 = R^2$. Proviamo che non esiste alcuna funzione ϕ di classe C^1 che verifica le condizioni del Teorema 2. Infatti, se esiste una tale ϕ si ha

$$\phi(1,x_1,x_2) = f(x_1,x_2) = x_2,$$

$$\phi(0,0,0) = 0,$$

$$H(x_1,x_2,p_1,p_2) = |x_1||p_2|,$$

$$\phi_t(t,x_1,x_2) - |x_1| \left|\phi_{x_2}(t,x_1,x_2)\right| = 0.$$

Poniamo

$$y(\theta) = (x_1\,,\ x_2 - |x_1|(\theta-t)) \quad \text{per } 0 \leqq t \leqq \theta \leqq 1.$$

Allora si ha

$$\max_{\theta}|y(\theta)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } |(x_1,x_2)| \longrightarrow 0$$

e, poiché $\phi_{y_2}(1,y_1,y_2) = 1$, si ha anche

$$\phi_{y_2}(\theta,y(\theta)) \geqq 0 \quad \text{per } t_0 \leqq \theta \leqq 1,$$

con $0 \leqq t_0 < 1$. Ne segue

$$\phi(1,y(1)) - \phi(t,y(t)) = \int_t^1 D_\theta\phi(\theta,y(\theta))d\theta =$$

$$= \int_t^1 |x_1| \, [|\phi_{y_2}(\theta,y(\theta)| - \phi_{y_2}(\theta,y(\theta))]d\theta = 0$$

se $t_0 \leqq t \leqq 1$. Pertanto si ha

$$\phi(t,x_1,x_2) = x_2 - |x_1|(1-t)$$

per $t_0 \leqq t \leqq 1$ e $|(x_1,x_2)|$ sufficientemente piccolo, e questo esclude che ϕ sia di classe C^1. Questo esempio è dovuto a Clarke.

BIBLIOGRAFIA

[1] F.H. CLARKE-R.B. VINTER: Local optimality conditions on lipschitzian solutions to the Hamilton-Jacobi equations. SIAM J. Control Optim. 21, 6(1983), 856-70.

[2] M.G. CRANDALL-P.L. LIONS: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans. AMS 277, 1(1983), 1-42.

[3] F.H. CLARKE: Generalized gradients and applications. Trans. AMS 205 (1975), 247-62.

[4] F.H. CLARKE: Necessary conditions for a general control problem. Calculus of Variations and Control Theory, D.L. Russel ed., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1976.

[5] P.L. LIONS: Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations-Pitman Research Notes Sevices, n. 69, Pitman, London, 1982.

[6] A.F. FILIPPOV: Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side. SIAM J. Control Optim. 5(1967), 609-21.

[7] J.P. AUBIN-A. CELLINA: Differential inclusions - Springer, 1982.

[8] F.H. CLARKE: The Erdman condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations. Canad J. Math. 32, 2 (1980), 494-509.

[9] L.C. EVANS: On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. Israel J. Math. 36 (1980), 225-47.

[10] R.B. VINTER: New global optimality conditions in optimal control theory. SIAM J. Control Optim. 21(1983), 235-45.